2.a) $I_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\int_1^2\frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}dx$ On pose : $\begin{bmatrix}u(x)=(\ln x)^{n+1}\Rightarrow u'(x)=(n+1)\frac{1}{x}.(\ln x)^n\\ v'(x)=\frac{1}{x^2}\Leftarrow v(x)=-\frac{1}{x}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow I_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\left[\left[-\frac{1}{x}(\ln x)^{n+1}\right]_1^2-\int_1^2-\frac{1}{x}.\frac{n+1}{x}(\ln x)^n\,dx\right]=\frac{1}{(n+1)!}\left[-\frac{1}{2}(\ln 2)^{n+1}+(n+1)\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx\right]$

$=-\frac{(\ln 2)^{n+1}}{2(n+1)!}+\frac{(n+1)}{(n+1)!}\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx=\underbrace{\frac{1}{n!}\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx}_{I_n}-\frac{(\ln 2)^{n+1}}{2(n+1)!}=I_n-\frac{(\ln 2)^{n+1}}{2(n+1)!}$

b) Par récurrence : pour n = 1, $I_1=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln 2}{1!}\right)$ la propriété est vraie. Supposons que :

$I_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln 2}{1!}+\frac{(\ln 2)^2}{2!}+....+\frac{(\ln 2)^n}{n!}\right)$, montrons que : $I_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln 2}{1!}+\frac{(\ln 2)^2}{2!}+....+\frac{(\ln 2)^n}{n!}+\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}\right)$. Or on a :

$I_{n+1}=I_n-\frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}\Rightarrow I_{n+1}=I_n-\frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln 2}{1!}+\frac{(\ln 2)^2}{2!}+....+\frac{(\ln 2)^n}{n!}\right)-\frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln 2}{1!}+\frac{(\ln 2)^2}{2!}+....+\frac{(\ln 2)^n}{n!}+\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}\right)$ donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*:I_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln 2}{1!}+\frac{(\ln 2)^2}{2!}+....+\frac{(\ln 2)^n}{n!}\right)$.

3.a) $u_n=1+\frac{\ln 2}{2!}+\frac{(\ln 2)^2}{3!}+....+\frac{(\ln 2)^{n-1}}{n!}\Leftrightarrow u_n.\ln 2=\frac{\ln 2}{1!}+\frac{(\ln 2)^2}{2!}+....+\frac{(\ln 2)^n}{n!}$ on aura : $I_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}u_n.\ln 2$ donc $u_n=\frac{1-2I_n}{\ln 2}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-2I_n}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}$ *car* $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$

Exercice N°17: I-1) les variations de g sur]0 ; 1]. $g'(x)=-2+\frac{1}{x}=\frac{-2x+1}{x}$. Le signe de g'(x) est celui de (-2 x + 1) car x>0. On a : $g'(x)=0\Rightarrow -2x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ $\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0+}2-2x+\ln x=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=0$

2) g est continue et strictement croissante sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ donc

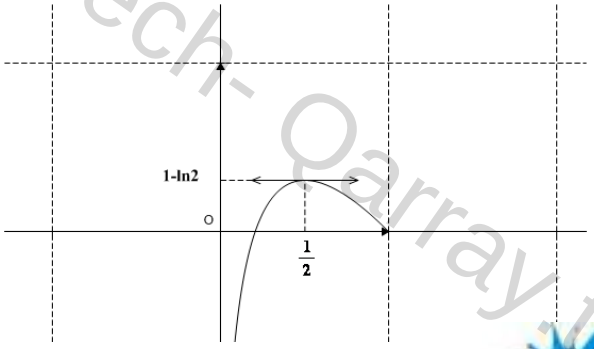
x	0		$\frac{1}{2}$		1
g'(x)	‖	+	0	−	
g(x)	‖ $-\infty$	↗	$1-\ln 2$	↘	0

elle réalise une bijection de $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ sur $]-\infty,1-\ln 2]$ comme $0\in]-\infty,1-\ln 2]$ alors g(x) = 0 admet une solution unique α.

Soit $t\in]0,\alpha]$ comme g est croissante alors g(t)≤ g(α) donc g(t) ≤ 0. Si $t\in\left[\alpha,\frac{1}{2}\right]\Rightarrow g(\alpha)\le g(t)\Rightarrow g(t)\ge 0$. Sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ g(t) admet 0 comme minimum absolue donc g(t) ≥ 0 pour tout $t\in[\alpha,1]$: g(t) ≥0 $\Rightarrow 2-2t+\ln t\ge 0\Leftrightarrow -\ln t\le 2-2t$.

3) $\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=-\infty$ alors (C_g) admet une asymptote verticale d'équation x = 0. $g'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ donc (C_g) admet une tangente horizontale en $\left(\frac{1}{2},1-\ln 2\right)$.

4) Donc l'aire $A=\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)dx\right)4^2\,cm^2$



Qarray.tn - Aqua Blech - Qarray.tn
Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...